COLÉGIO
SÃO VICENTE DE PAULO

2º ANO | EM

Matemática I

Aluno (a): ______________________________ nº: ________

Professor(a): RAPHAEL LIMA __________ Data: ___/___/___ Turma: ________

Lista 16

1. Durante o desfile de Carnaval das escolas de samba do Rio de Janeiro em 2017, uma empresa especializada em pesquisa de opinião entrevistou 140 foliões sobre qual agremiação receberia o prêmio de melhor do ano que é concedido apenas a uma escola de samba.
Agrupados os resultados obtidos, apresentaram-se os índices conforme o quadro a seguir:

Agremiação escolhida	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A, B e C
Nº de foliões que escolheram	77	73	70	20	25	40	5

A respeito dos dados colhidos, analise as proposições a seguir e classifique-as em V (VERDADEIRA) ou F (FALSA).
( ) Se A for a agremiação vencedora em 2017 e se um dos foliões que opinaram for escolhido ao acaso, então a probabilidade de que ele NÃO tenha votado na agremiação que venceu é igual a 45%.
( ) Escolhido ao acaso um folião, a probabilidade de que ele tenha indicado exatamente duas agremiações é de 50%.
( ) Se a agremiação B for a campeã em 2017, a probabilidade de que o folião entrevistado tenha indicado apenas esta como campeã é menor que 10%.

A sequência correta é
a) V – V – F
b) F – V – V
c) F – V – F
d) V – F – V

2. Em um certo grupo de pessoas, 40 falam inglês, 32 falam espanhol, 20 falam francês, 12 falam inglês e espanhol, 8 falam inglês e francês, 6 falam espanhol e francês, 2 falam as 3 línguas e 12 não falam nenhuma das línguas. Escolhendo aleatoriamente uma pessoa desse grupo, qual a probabilidade de essa pessoa falar espanhol ou francês?
a) $7{,}5\%$.
b) 40%.
c) 50%.
d) $57{,}5\%$.
e) $67{,}5\%$.

3. Durante os séculos 18 e 19, muitos matemáticos se destacaram por suas contribuições na área da matemática. Dentre eles está Carl Friedrich Gauss (1777–1855) que ficou conhecido como "o príncipe da matemática" ou "o mais notável dos matemáticos" e seu trabalho teve enorme importância principalmente em áreas como a teoria da probabilidade. De posse dessa teoria, duas pessoas, A e B, decidem lançar um par de dados. Eles combinam que se a soma dos números dos dados for 7, A ganha, e se a soma for 10, B ganha. Cada par de dados é lançado uma única vez. A probabilidade de B ganhar é de

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{36}$ d) $\frac{1}{12}$

4. Um exame de laboratório tem eficiência de 90% para detectar uma doença quando essa doença existe de fato. Entretanto, o teste aponta um resultado "falso positivo" (o resultado indica doença, mas ela não existe) para 1% das pessoas sadias testadas. Se $1,5\%$ da população tem a doenças, qual a probabilidade de uma pessoa ter a doença dado que seu exame foi positivo?

a) $\frac{95}{294}$

b) $\frac{160}{433}$

c) $\frac{270}{467}$

d) $\frac{75}{204}$

e) $\frac{73}{255}$

5. Uma loteria consiste no sorteio de três números distintos entre os 20 números inteiros de 1 a $20;$ a ordem deles não é levada em consideração. Ganha um prêmio de R\$ 100.000,00 o apostador que comprou o bilhete com os números sorteados. Não existem bilhetes com a mesma trinca de números. O ganho esperado do apostador que comprou um determinado bilhete é igual ao prêmio multiplicado pela probabilidade de ganho.

Quem apostou na trinca $\{4, 7, 18\}$ tem um ganho esperado de aproximadamente

a) R\$ 88,00

b) R\$ 89,00

c) R\$ 90,00

d) R\$ 91,00

e) R\$ 92,00

6. Ao lançar um dado 3 vezes sucessivas, qual é a probabilidade de obter ao menos um número ímpar?

a) $1/8$

b) $1/4$

c) $3/8$

d) $5/8$

e) $7/8$

7. Sofia deveria ter estudado 10 temas de biologia para fazer uma avaliação, porém só estudou $2.$ Nessa avaliação, ela poderá ser reprovada $(R),$ aprovada com ressalvas (AR) ou aprovada $(A).$ Antes de iniciar a avaliação, a professora de Sofia dá a ela o direito de escolher uma das seguintes estruturas de avaliação:

Avaliação 1 – composta por apenas 2 questões, cada uma tratando de um dos 10 temas (sem repetir os temas), sendo que errar duas implica $R,$ acertar apenas uma implica $AR,$ e acertar as duas implica $A.$

Avaliação 2 – composta por apenas 3 questões, cada uma tratando de um dos 10 temas (sem repetir os temas), sendo que errar duas ou mais questões implica $R,$ acertar apenas duas implica $AR,$ e acertar as três implica $A.$

Considere que Sofia sempre acerta questões dos temas que estudou, e que sempre erra questões dos temas que não estudou.

a) Calcule as probabilidades de $R,$ AR e A para o caso de Sofia ter escolhido a avaliação $1.$

b) Se Sofia pretende ser aprovada, independentemente de ser com ressalvas (AR) ou diretamente $(A),$ em qual das avaliações ela terá maior chance? Justifique matematicamente sua conclusão por meio de cálculos de probabilidade.

8. Uma urna contém 18 bolas vermelhas, 12 amarelas e 20 brancas, sendo todas idênticas. Quantas bolas brancas devem ser retiradas dessa urna, de modo que, ao sortear uma bola, a probabilidade de ela ser branca seja igual a $\frac{1}{6}$?

a) 16
b) 15
c) 14
d) 13
e) 12

9. a) De forma consecutiva extraímos de uma urna três bolas numeradas de 1 a 9, repondo a bola retirada após cada extração, formando um número de três algarismos. O primeiro algarismo sorteado é o algarismo das centenas; o segundo, o das dezenas; e o terceiro, o das unidades.

Calcule a probabilidade de que saia um número

I. com três algarismos repetidos;
II. sem nenhum algarismo repetido;
III. com exatamente dois algarismos exatamente iguais.

b) Em uma caixa com 10 lapiseiras, 4 delas estão com defeito. Se um cliente compra 2 lapiseiras escolhidas aleatoriamente, é certo afirmar que a probabilidade de que nenhuma lapiseira esteja com defeito é maior que 30%?

10. Uma prova consta de 7 questões de múltipla escolha, com 4 alternativas cada uma, e apenas uma correta. Se um aluno escolher como correta uma alternativa ao acaso em cada questão, a probabilidade de que ele acerte ao menos uma questão da prova é de, aproximadamente:

a) 87%.
b) 85%.
c) 90%.
d) 47%.

11. O valor da expressão $E = (999)^5 + 5 \cdot (999)^4 + 10 \cdot (999)^3 + 10 \cdot (999)^2 + 5 \cdot (999) + 1$ é igual a

a) $9 \cdot 10^3$
b) $9 \cdot 10^{15}$
c) 10^{15}
d) 999.999
e) $999 \cdot 10^{15}$

12. Assinale o que for correto.

01) Simplificando a expressão $\frac{(n+4)! - 20(n+2)!}{(n+8) \cdot (n+2)!}$ obtém-se $n-1$.
02) No desenvolvimento do binômio $\left(3x + \frac{a}{x}\right)^4$, o termo independente de x é $\frac{27}{2}$. Então $a^2 = \frac{1}{4}$.
04) Permutando os algarismos $1, 1, 3, 3, 3, 5$ podem ser formados 20 números maiores que 500.000.
08) $\binom{20}{3} + \binom{20}{4} + \binom{20}{5} + \dots \binom{20}{20} = 2^{20} - 211$.
16) Num estádio há 12 portas de entrada e saída. Existem 132 possibilidades de uma pessoa entrar por uma porta e sair por outra diferente.

13. Sabendo que $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 256,$ então o valor de n vale

a) 8
b) 7
c) 6
d) 5
e) 4

14. No desenvolvimento do binômio $\left(x^2 + \frac{k}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$, onde n e k são números reais, o 4º termo vale $280x^7$.

Nesse contexto, assinale o que for correto.
01) n é um número primo.
02) $n + k > 10$.
04) O desenvolvimento não tem um termo independente de x.
08) A soma de seus coeficientes é 81.
16) O coeficiente do 3º termo vale 84.

15. Se n é um número natural maior do que dois, ao ordenarmos o desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^n$ segundo as potências decrescentes de $x,$ verificamos que os coeficientes dos três primeiros termos estão em progressão aritmética. Nessas condições, o valor de n é
a) 8.
b) 6.
c) 4.
d) 10.

16. Um grupo de oito alunos está sendo liderado em um passeio por dois professores e, em determinado momento, deve se dividir em dois subgrupos. Cada professor irá liderar um dos subgrupos e cada aluno deverá escolher um professor.
A única restrição é que cada subgrupo deve ter no mínimo um aluno.
O número de maneiras distintas de essa subdivisão ser feita é
a) 128.
b) 64.
c) 248.
d) 254.
e) 256.

17. Seja o desenvolvimento do Teorema Binomial

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots \quad \binom{n}{n} {}^{n}$$

onde $n \in \square$ a e $b \in \square$ e os coeficientes binomiais $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots \binom{n}{n}$ determinados por $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ com n e $p \in \square$ e $n \geq p.$

Considerando as condições acima em relação ao Teorema Binomial,

a) desenvolva $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$;

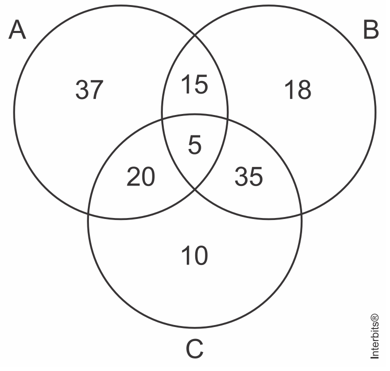
b) para determinar um termo específico do binômio de Newton, é utilizado o termo geral $T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$

Determine o 8º termo do binômio $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$.

Gabarito:

Resposta da questão 1:
[A]

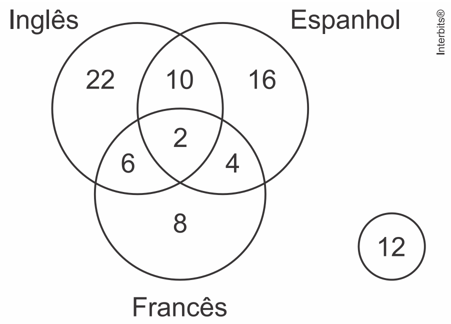
Considere o diagrama.



Tem-se que o número de foliões que não votaram em A é igual a $18+35+10=63.$ Logo, a probabilidade de que um folião escolhido ao acaso não tenha votado em A é dada por $\frac{63}{140}\cdot 100\% = 45\%.$
Escolhido ao acaso um folião, a probabilidade de que ele tenha indicado exatamente duas agremiações é de $\frac{15+20+35}{140}\cdot 100\% = 50\%.$
Se a agremiação B for a campeã em 2017, a probabilidade de que o folião entrevistado tenha indicado apenas esta como campeã é $\frac{18}{140} > \frac{14}{140} = 10\%.$

Resposta da questão 2:
[D]

Seja o diagrama de Venn com todas as pessoas e as línguas que falam:



Para obter a probabilidade de quem fala espanhol ou francês deve-se obter a probabilidade de quem fala espanhol mais a probabilidade de quem fala francês menos a probabilidade de quem fala espanhol e francês, ou seja:

Sabendo que o total de pessoas é $80,$ temos a seguinte probabilidade:

$$P = P_{(\text{espanhol})} + P_{(\text{francês})} - P_{(\text{espanhol} \wedge \text{francês})}$$

$$P = \frac{32}{80} + \frac{20}{80} - \frac{6}{80}$$

$$P = 0{,}4 + 0{,}25 - 0{,}075$$

$$P = 0{,}575$$

$$P = 57{,}5\%$$

Resposta da questão 3:
[D]

Para que B vença, as possíveis combinações dos dois dados devem ser:
$4+6$ ou $5+5$ ou $6+4$

Observe que a probabilidade de se lançar um dado e cair um número ao acaso é $\frac{1}{6}$, visto que um dado possui seis faces. Desta forma, as probabilidades $(P(X))$, são o produto de ambas as possibilidades de se obter a soma desejada. Ou seja,

$$P(4+6)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$
$$P(5+5)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$
$$P(6+4)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

Logo, somando as possíveis probabilidades temos:

$$P(4+6)+P(5+5)+P(6+4)=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{12}$$

Resposta da questão 4:
[C]

Sendo P o total de pessoas da população, temos:
Pessoas sadias que são consideradas doentes: $\frac{1}{100}\cdot\frac{98{,}5}{100}\cdot P$

Pessoas doentes que são consideradas doentes: $\frac{90}{100}\cdot\frac{1{,}5}{100}\cdot P$

Assim, a probabilidade de uma pessoa ter a doença dado que o exame apontou positivo é:

$$\frac{\frac{90}{100}\cdot\frac{1{,}5}{100}\cdot P}{\frac{1}{100}\cdot\frac{98{,}5}{100}\cdot P+\frac{90}{100}\cdot\frac{1{,}5}{100}\cdot P}=\frac{270}{467}$$

Resposta da questão 5:
[A]

Calculando:

$$C_{20,3}=\frac{20!}{3!\cdot 17!}=1140$$
$$P(4,7,18)=\frac{1}{C_{20,3}}=\frac{1}{1140}$$
$$\text{Ganho}=100000\cdot\frac{1}{1140}=87{,}72\approx 88\text{ reais}$$

Resposta da questão 6:
[E]

Supondo um dado convencional (seis faces, numeradas de 1 a 6) e não viciado, sendo P a probabilidade de obter três números pares em três lançamentos sucessivos, temos:

$$P=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}$$
$$P=\frac{1}{8}$$

A probabilidade de obter ao menos um número ímpar no lançamento de tal dado três vezes sucessivas é $\overline{P}$, de modo que:
$$P + \overline{P} = 1$$

Então,
$$\frac{1}{8} + \overline{P} = 1$$
$$\overline{P} = 1 - \frac{1}{8}$$
$$\overline{P} = \frac{7}{8}$$

Resposta da questão 7:
a) A probabilidade de R é dada por
$$\frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{8!}{2!\cdot 6!}}{\frac{10!}{2!\cdot 8!}} = \frac{28}{45}.$$

A probabilidade de AR é igual a
$$\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{2\cdot 8}{\frac{10!}{2!\cdot 8!}} = \frac{16}{45}.$$

Desde que o único caso favorável para A ocorre quando os dois temas sorteados são os que Sofia estudou, podemos concluir que a probabilidade de A é $\frac{1}{45}.$

b) Conforme (a), Sofia é aprovada na avaliação 1 com probabilidade igual a $\frac{17}{45}.$

Por outro lado, ela é aprovada na avaliação 2 com probabilidade
$$\frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{8}{\frac{10!}{3!\cdot 7!}} = \frac{3}{45}.$$

Em consequência, como $\frac{17}{45} > \frac{3}{45},$ podemos afirmar que ela terá mais chance na avaliação $1.$

Resposta da questão 8:
[C]

Admitindo que x seja a quantidade de bolas brancas que serão retiradas, temos:
$$\frac{20-x}{50-x} = \frac{1}{6} \Rightarrow 50 - x = 120 - 6x \Rightarrow 5x = 70 \Rightarrow x = 14$$

Resposta da questão 9:
a) Calculando:

[I] $P(x) = \frac{9}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{81}$

[II] $P(x) = \frac{9}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{9} = \frac{56}{81}$

[III] $P(x) = 1 - \frac{1}{81} - \frac{56}{81} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$

b) Calculando:
$P(x) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3} \approx 33\% > 30\%$

Resposta da questão 10:
[A]

A probabilidade de ele acertar ao menos uma questão da prova é igual a probabilidade total (100%) menos a probabilidade de ele errar todas as questões. Cada questão tem a probabilidade de acerto de 25% (ou $1/4$) e de erro de 75% (ou $3/4$). Assim, a probabilidade de errar todas as questões seria:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^7 = \frac{2187}{16384} = 0{,}133 \approx 13\%$$

E a probabilidade de que ele acerte ao menos uma questão da prova é de, aproximadamente:
$100\% - 13\% = 87\%$

Resposta da questão 11:
[C]

$$E = (999)^5 + 5 \cdot (999)^4 + 10 \cdot (999)^3 + 10 \cdot (999)^2 + 5 \cdot (999) + 1 = (1 + 999)^5 = 1000^5 = \left(10^3\right)^5 = 10^{15}$$

Resposta da questão 12:
01 + 02 + 08 + 16 = 27.

[01] Verdadeira. De fato, sendo $n \geq -2,$ com $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} \frac{(n+4)! - 20(n+2)!}{(n+8) \cdot (n+2)!} &= \frac{(n+4)(n+3) - 20}{n+8} \\ &= \frac{(n-1)(n+8)}{(n+8)} \\ &= n-1. \end{aligned}$$

[02] Verdadeira. O termo geral do desenvolvimento do binômio é

$$\begin{aligned} T_{p+1} &= \binom{4}{p} \cdot (3x)^{4-p} \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^p \\ &= \binom{4}{p} \cdot 3^{4-p} \cdot a^p \cdot x^{4-2p}. \end{aligned}$$

Logo, se o termo independente de x é $\frac{27}{2},$ então

$$\binom{4}{2} \cdot 3^{4-2} \cdot a^2 = \frac{27}{2} \Leftrightarrow 6 \cdot 9 \cdot a^2 = \frac{27}{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{4}.$$

[04] Falsa. Fixando o algarismo 5 na casa das centenas de milhar, tem-se que existem, com os algarismos disponíveis, $P_5^{(3,\,2)} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ números maiores do que $500.000.$

[08] Verdadeira. Com efeito, pelo Teorema das Linhas, segue que

$$\binom{20}{0}+\binom{20}{1}+\binom{20}{2}+\binom{20}{3}+\binom{20}{4}+\binom{20}{5}+\dots\binom{20}{20}=2^{20}\Leftrightarrow$$
$$1+20+190+\binom{20}{3}+\binom{20}{4}+\binom{20}{5}+\dots\binom{20}{20}=2^{20}\Leftrightarrow$$
$$\binom{20}{3}+\binom{20}{4}+\binom{20}{5}+\dots\binom{20}{20}=2^{20}-211.$$

[16] Verdadeira. De fato, pois como existem 12 possibilidades para entrar e 11 para sair, pelo Princípio Multiplicativo, há $12\cdot 11=132$ maneiras de entrar por uma porta e sair por outra diferente.

Resposta da questão 13:
[A]

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$$

Assim,
$2^n=256$
$2^n=2^8$
$n=8$

Resposta da questão 14:
01 + 16 = 17.

Vamos supor que n seja um número natural. Desse modo, o termo geral do binômio $\left(x^2+\frac{k}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ é igual a

$$\begin{aligned}T_{p+1}&=\binom{n}{p}(x^2)^{n-p}\left(\frac{k}{\sqrt[3]{x}}\right)^p\\&=k^p\binom{n}{p}x^{2n-2p-\frac{p}{3}}\\&=k^p\binom{n}{p}x^{2n-\frac{7p}{3}}.\end{aligned}$$

Logo, se $k^3\binom{n}{3}x^{2n-7}=280x^7,$ então $n=7$ e, portanto, temos $k^3\binom{7}{3}=280\Leftrightarrow k^3=8\Leftrightarrow k=2.$

[01] Verdadeira. Com efeito, pois $n=7$ é um número primo.

[02] Falsa. Temos $n+k=7+2=9<10.$

[04] Falsa. Para que o desenvolvimento apresente pelo menos um termo independente de $x,$ devemos ter $2n-\frac{7p}{3}=0,$ ou seja, $n=\frac{7p}{6}.$ Em consequência, o desenvolvimento possui dois termos independentes de $x.$

[08] Falsa. Tomando $x=1,$ segue que a soma dos coeficientes do binômio é igual a $\left(1^2+\frac{2}{\sqrt[3]{1}}\right)^7=3^7=2187.$

[16] Verdadeira. De fato, pois $2^2\cdot\binom{7}{2}=4\cdot 21=84.$

Resposta da questão 15:
[A]

O termo geral do desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^n$, segundo as potências decrescentes de x, é

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} \cdot (x^2)^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^k = \frac{1}{2^k} \cdot \binom{n}{k} \cdot x^{2n-3k}.$$

Assim, os coeficientes dos três primeiros termos são: 1, $\frac{n}{2}$ e $\frac{n \cdot (n-1)}{8}$.

Portanto, segue que

$$2 \cdot \frac{n}{2} = 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{8} \Leftrightarrow n^2 - 9n + 8 = 0 \Rightarrow n = 8.$$

Resposta da questão 16:
[D]

Considerando dois grupos A e B.
Portanto, o número de maneiras de se formar os grupos A ou B será dado por:
$$\binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{6}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} = 2^8 - \binom{8}{0} - \binom{8}{8} = 256 - 1 - 1 = 254$$

Portanto, o número de maneiras de se realizar a divisão pedida será dada por 254.

Resposta da questão 17:
a) Temos

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 &= \binom{5}{0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)^4 \frac{1}{\sqrt{x}} + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)^3 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \\ &\quad + \binom{5}{3}\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + \binom{5}{4}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 \\ &= \frac{1}{x^{10}} + \frac{5}{x^8\sqrt{x}} + \frac{10}{x^7} + \frac{10}{x^5\sqrt{x}} + \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x^2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

b) O oitavo termo do binômio $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é

$$\begin{aligned}T_8 &= \binom{12}{7}\left(\frac{1}{x^2}\right)^5 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7 \\ &= \frac{12!}{7! \cdot 5!} \cdot \frac{1}{x^{10}} \cdot \frac{1}{x^3\sqrt{x}} \\ &= \frac{792}{x^{13}\sqrt{x}}.\end{aligned}$$