COLÉGIO SÃO VICENTE DE PAULO

3º ANO | EM | Matemática II

Aluno (a): ______________________ nº: ______

Professor(a): RAPHAEL LIMA Data: ___/___/___ Turma: ______

Lista 19

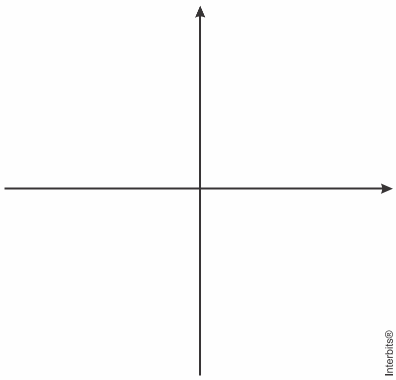
1. (Pucrj 2017) Dadas as funções f,g R → R definidas por $f(x) = x^2 - 13x + 36$ e $g(x) = -2x + 12$.

a) Encontre os pontos de interseção dos gráficos das duas funções.
b) Encontre os valores reais de x para os quais $f(x) \geq g(x)$.
c) Encontre os valores reais de x que satisfazem $f(x+1) = g(x-2)$.

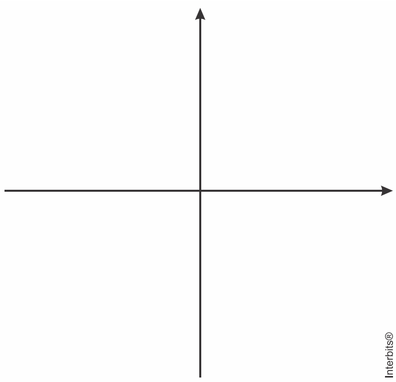
2. (Pucrj 2017) Sejam g_0, ,g_1 R → R as seguintes funções:

$$g_0(x) = \frac{|x+2| - |x-2|}{2}$$
$$g_1(x) = \frac{g_0(4x+6) + g_0(4x-6)}{2}$$

a) Faça o esboço do gráfico de g_0.



b) Faça o esboço do gráfico de g_1.



c) Resolva a inequação $g_1(x) \leq \frac{x}{2}$.

3. (Pucrj 2017) Mônica tem uma blusa de cada uma das seguintes cores: branca, vermelha, amarela, preta e verde. Ela também tem uma calça de cada uma das seguintes cores: preta, azul, cinza e branca.

a) De quantas maneiras Mônica pode escolher uma blusa e uma calça para sair?
b) De quantas maneiras Mônica pode escolher uma blusa e uma calça de cores diferentes uma da outra?
c) Na segunda-feira, Mônica usou calça azul e camisa preta. Na terça-feira, ela quer escolher uma calça e uma camisa de cores diferentes uma da outra. Sabendo que as roupas que ela usou na segunda-feira estão lavando (e apenas estas), de quantas maneiras ela pode escolher suas roupas?

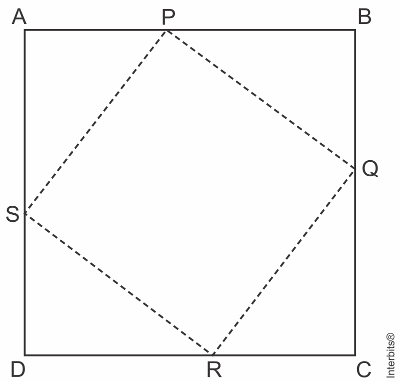
4. (Pucrj 2017) Temos uma urna com 100 bolas numeradas de 1 a 100.

a) Escolhendo duas bolas distintas simultaneamente, qual a probabilidade de que a soma seja 3?
b) Escolhendo duas bolas distintas simultaneamente, qual a probabilidade de que a soma seja menor ou igual a 7?
c) Escolhendo duas bolas distintas simultaneamente, qual a probabilidade de que o produto seja um número par?

5. (Pucrj 2017) Considere a parábola de equação $y = x^2 - x + 1$

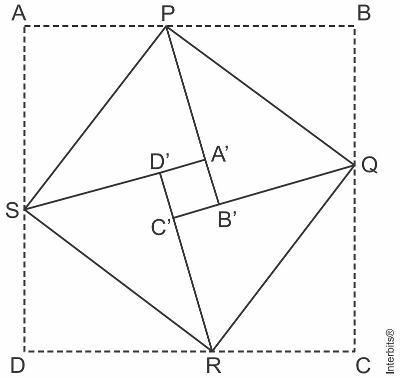
a) Encontre os pontos de interseção da parábola com a reta de equação $y = x + 1$.
b) Encontre b para o qual a parábola intercepta a reta de equação $y = x + b$ em um único ponto.
c) Encontre as retas que passam pelo ponto $(1, 0)$ e que interceptam a parábola em um único ponto.

6. (Pucrj 2017) Considere um quadrado $ABCD$, de cartolina e de lado 70 cm (conforme figura abaixo).

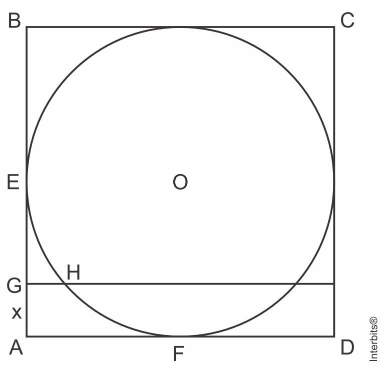


Temos que P, Q, R e S pertencem aos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, e que os segmentos AP, BQ, CR e DS medem 30 cm cada um.

a) Calcule a área do triângulo APS.
b) Calcule a área do quadrado $PQRS$.
c) Dobramos a folha ao longo de PQ, QR, RS e SP de tal forma que os triângulos BPQ, CQR, DRS e ASP venham a ocupar o interior do quadrado $PQRS$, conforme figura abaixo. Sejam A', B', C' e D' as novas posições dos vértices destes triângulos. Calcule a medida do lado do quadrado $A'B'C'D'$.



7. (Pucrj 2017) Considere, como na figura, um quadrado $ABCD$ de lado 2 e um círculo inscrito de centro O e raio $1.$ Sejam E e F os pontos médios dos lados AB e $AD,$ respectivamente.



a) Calcule a área do quadrado e a área do círculo.
b) Calcule a área da região limitada pelos segmentos $AE,$ AF e pelo arco $EF.$
c) Seja GH um segmento de reta paralelo ao lado $AD,$ em que G pertence ao segmento AE e H pertence ao arco $EF.$ Sabendo que os pontos $A,$ H e C são colineares, calcule a área da região limitada pelos segmentos $AF,$ $AG,$ GH e pelo arco $FH.$

8. (Pucrj 2017) Na escola de Alberto, Pedro e João, as notas das provas variam de 0 a $10,0.$

a) Alberto faz três provas e tira notas $6,0$ e $6,5$ e $8,5.$ Se as provas têm o mesmo peso, qual é a média final de Alberto?
b) Pedro faz três provas de igual peso e tira $4,0$ e $5,0$ nas duas primeiras provas. Qual a nota mínima que Pedro precisa tirar para que a sua média seja maior ou igual a $6,0?$
c) Numa disciplina com três provas de igual peso, João tira $3,0$ na primeira prova. Qual a nota mínima que João precisa tirar na segunda prova para ainda ter chance de passar com média $6,0?$

9. (Pucrj 2016) Considere as funções: $f_1 : [-1, 1] \to [-1, 1]$ e $f_2 : [-1, 1] \to [-1, 1]$ onde:

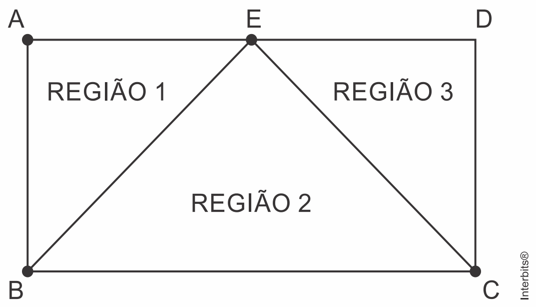
$$f_1(x) = \begin{cases} 3x + 2, \text{ se } -1 \le x \le -\dfrac{1}{2} \\ -x, \text{ se } -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2} \\ 3x - 2, \text{ se } \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4} f_1(4x+3) - \dfrac{1}{4}, \text{ se } -1 \le x \le -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} f_1(2x), \text{ se } -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{4} f_1(4x-3) + \dfrac{1}{4}, \text{ se } \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

a) Faça um esboço do gráfico de $f_1.$ Justifique sua resposta.
b) Calcule $f_2\left(\dfrac{1}{3}\right).$ Justifique sua resposta.
c) Encontre todas as soluções de $f_2(x) = x.$ Justifique sua resposta.

10. (Pucrj 2016) Temos um baralho comum, com 52 cartas, das quais 4 são ases.

a) Tiramos uma carta ao acaso. Qual é a probabilidade de que ela seja um ás?
b) Tiramos (do baralho completo) 5 cartas (simultaneamente). Qual é a probabilidade de que, entre essas cartas, não haja nenhum ás?

11. (Pucrj 2016) Uma empresa está desenvolvendo um painel retangular para um jogo de dardos, que consiste de um retângulo de base $1\,\text{m}$ e altura $0,5\,\text{m}$ e um triângulo isósceles de base $1\,\text{m}$, conforme ilustrado na figura abaixo.



Considere as seguintes regiões:
Região 1: é a região interior delimitada pelo triângulo $ABE.$
Região 2: é a região interior delimitada pelo triângulo $BCE.$
Região 3: é a região interior delimitada pelo triângulo $CDE.$

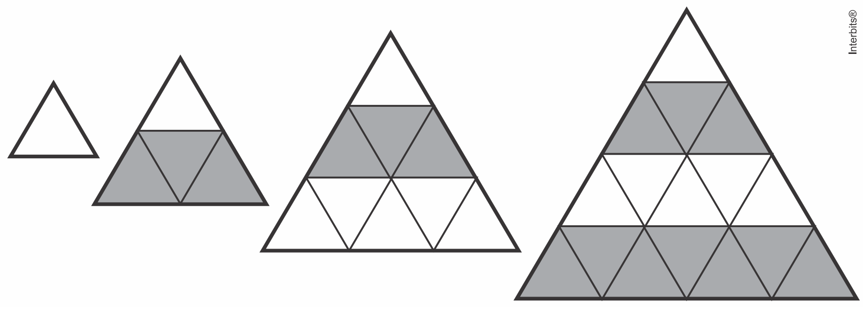
Um jogador que acerta a região 1 ganha 20 pontos; a região $2,$ 10 pontos e a região $3,$ 20 pontos. Sabendo que Pelé é um jogador profissional de dardos e que sempre acerta o painel retangular, determine:

a) a probabilidade de, ao lançar dois dardos, Pelé acertar os dois na região $2,$ justificando sua resposta;
b) a probabilidade de Pelé ganhar 40 pontos, lançando no máximo três dardos, justificando sua resposta;
c) a probabilidade de Pelé acertar três regiões diferentes, lançando três dardos (um após o outro), justificando sua resposta.

12. (Pucrj 2016) Seja N um inteiro positivo.
Um triângulo equilátero de lado N é subdividido em triângulos equiláteros de lado $1,$ como exemplificado na figura.

Observe que o triângulo fica dividido em N linhas:
a 1ª linha com 1 triângulo,
a 2ª linha com 3 triângulos e assim por diante.

Colorimos os triângulos
da 1ª linha de branco,
da 2ª linha de cinza,
da 3ª linha de branco,
da 4ª linha de cinza e assim sucessivamente.



a) Quantos triângulos equiláteros de lado 1 há dentro de um triângulo equilátero de lado $N,$ em função de $N?$ Justifique sua resposta.
b) Tomando $N = 9,$ quantos triângulos há de cada cor? Justifique sua resposta.
c) Tomando $N = 10$ e selecionando dois triângulos simultaneamente, qual a probabilidade de que eles sejam da mesma cor? Justifique sua resposta.

13. (Pucrj 2016) Sejam os pontos $A = (0,0)$ e $B = (3,4).$

a) Qual é a distância entre A e $B?$
b) Sabemos que a área do triângulo ABC é igual a 4 e que o vértice C pertence à reta de equação $x + y = 2.$ Determine o ponto $C.$

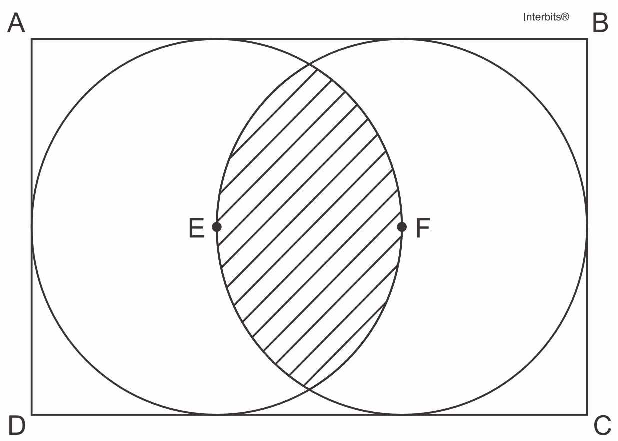
14. (Pucrj 2016) Seja a função real $h(x) = 1 - x^2$.

a) Calcule a área do triângulo de vértices $(-1, h(-1))$, $(0, h(0))$ e $(1, h(1))$. Justifique sua resposta.

b) Calcule a área do triângulo de vértices $(0, h(0))$, $\left(\frac{1}{2}, h\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ e $(1, h(1))$. Justifique sua resposta.

c) Calcule a área do polígono convexo de vértices $(-1, h(-1))$, $\left(-\frac{3}{4}, h\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, h\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ $\left(-\frac{1}{4}, h\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$, $(0, h(0))$, $\left(\frac{1}{4}, h\left(\frac{1}{4}\right)\right)$, $\left(\frac{1}{2}, h\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, $\left(\frac{3}{4}, h\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ e $(1, h(1))$. Justifique sua resposta.

15. (Pucrj 2016) O retângulo $ABCD$ têm lados 40 e 60.



Considere os círculos de centros E e F, contidos no retângulo e tangenciando três de seus lados, como mostrado na figura.

a) Qual é o raio desses círculos?
b) Calcule a área da região contida no interior dos dois círculos (hachurada na figura).

Gabarito:

Resposta da questão 1:

a) Para encontrar os pontos de interseção dos gráficos de f e g, basta resolvermos a equação $f(x) = g(x)$.

De $f(x) = x^2 - 13x + 36$, $g(x) = -2x + 12$ e $f(x) = g(x)$,

$x^2 - 13x + 36 = -2x + 12$

$x^2 - 11x + 24 = 0$

Resolvendo a equação acima,
$x = 3$ ou $x = 8$

De $x = 3$,

$g(3) = -2 \cdot 3 + 12$

$g(3) = 6$

De $x = 8$,

$g(8) = -2 \cdot 8 + 12$

$g(8) = -4$

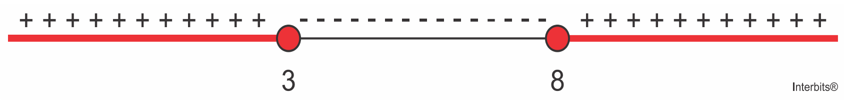
Logo, os pontos de interseção dos gráficos das funções são $(3, 6)$ e $(8, -4)$.

b) De $f(x) \geq g(x)$,

$x^2 - 13x + 36 \geq -2x + 12$

$x^2 - 11x + 24 \geq 0$

$(x - 3) \cdot (x - 8) \geq 0$



$x \leq 3$ ou $x \geq 8$

c) De $f(x) = x^2 - 13x + 36$,

$f(x + 1) = (x + 1)^2 - 13 \cdot (x + 1) + 36$

$f(x + 1) = x^2 + 2x + 1 - 13x - 13 + 36$

$f(x + 1) = x^2 - 11x + 24$

De $g\left(x\right) = -2x + 12$,

$g(x - 2) = -2 \cdot (x - 2) + 12$

$g(x - 2) = -2x + 4 + 12$

$g(x - 2) = -2x + 16$

Então,

$x^2 - 11x + 24 = -2x + 16$

$x^2 - 9x + 8 = 0$

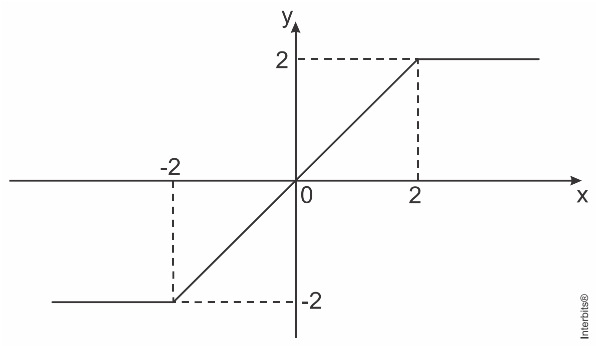
Resolvendo a equação acima,
$x = 1$ ou $x = 8$

Resposta da questão 2:

a) De $g_0\left(x\right) = \dfrac{|x + 2| - |x - 2|}{2}$,

	-2	2	
$\lvert x+2\rvert$	-x - 2	x + 2	x + 2
$\lvert x-2\rvert$	-x + 2	-x + 2	x - 2
$\lvert x+2\rvert - \lvert x-2\rvert$	-4	2x	4
$g_0(x)$	-2	x	2

$$g_0(x) = \begin{cases} -2 \text{ se } x \le -2 \\ x \text{ se } -2 \le x \le 2 \\ 2 \text{ se } x \ge 2 \end{cases}$$



b) De $g_0(x) = \dfrac{|x+2| - |x-2|}{2}$,

$$g_0(4x+6) = \frac{|4x+6+2| - |4x+6-2|}{2}$$

$$g_0(4x+6) = \frac{|4x+8| - |4x+4|}{2}$$

$$g_0(4x+6) = \frac{4|x+2| - 4|x+1|}{2}$$

$$g_0(4x+6) = 2|x+2| - 2|x+1|$$

De $g_0(x) = \dfrac{|x+2| - |x-2|}{2}$,

$$g_0(4x-6) = \frac{|4x-6+2| - |4x-6-2|}{2}$$

$$g_0(4x-6) = \frac{|4x-4| - |4x-8|}{2}$$

$$g_0(4x-6) = \frac{4|x-1| - 4|x-2|}{2}$$

$$g_0(4x-6) = 2|x-1| - 2|x-2|$$

Assim,

$$g_1(x) = \frac{g_0(4x+6) + g_0(4x-6)}{2}$$

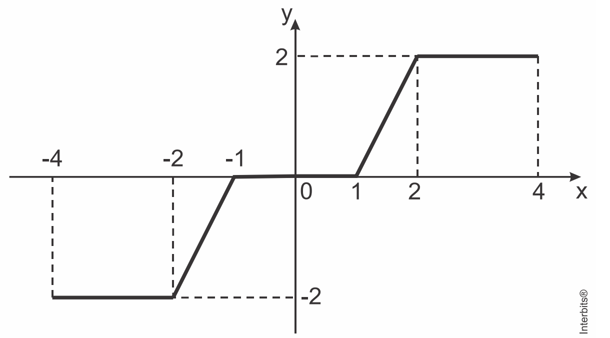
$$g_1(x) = \frac{2|x+2| - 2|x+1| + 2|x-1| - 2|x-2|}{2}$$

$$g_1(x) = |x+2| - |x+1| + |x-1| - |x-2|$$

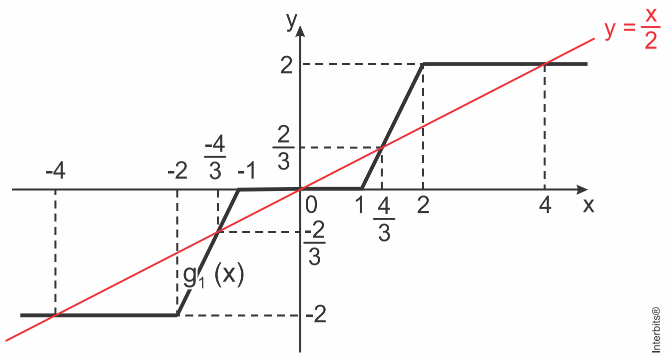
	-2	-1	1	2	
$\lvert x + 2\rvert$	-x - 2	x + 2	x + 2	x + 2	x + 2
$\lvert x + 1\rvert$	-x - 1	-x - 1	x + 1	x + 1	x + 1
$\lvert x - 1\rvert$	-x + 1	-x + 1	-x + 1	x - 1	x - 1
$\lvert x - 2\rvert$	-x + 2	-x + 2	-x + 2	-x + 2	x - 2
$g_1(x)$	-2	2x + 2	0	2x - 2	2

Interbits®

$$g_1(x) = \begin{cases} -2 \text{ se } x \le -2 \\ 2x + 2 \text{ se } -2 \le x \le -1 \\ 0 \text{ se } -1 \le x \le 1 \\ 2x - 2 \text{ se } 1 \le x \le 2 \\ 2 \text{ se } x \ge 2 \end{cases}$$



c) Teremos:



Do gráfico, $g_1(x) \le \frac{x}{2}$,

$-4 \le x \le -\frac{4}{3}$ ou $0 \le x \le \frac{4}{3}$ ou $x \ge 4$

Portanto, $S = \left\{ x \in \mathbb{R} : -4 \le x \le -\frac{4}{3} \text{ ou } 0 \le x \le \frac{4}{3} \text{ ou } x \ge 4 \right\}$

Resposta da questão 3:

a) Como Mônica possui 5 blusas distintas e 4 calças distintas, o total de maneiras de escolher uma blusa e uma calça para sair é dado pelo princípio fundamental da contagem.

Seja x o total de maneiras, temos:

$x = 5 \cdot 4$

$x = 20$

b) Se Mônica escolher a blusa de cor branca, há 3 possibilidades de escolha para a calça.

Se Mônica escolher a blusa de cor vermelha, há 4 possibilidades de escolha para a calça.

Se Mônica escolher a blusa de cor amarela, há 4 possibilidades de escolha para a calça.

Se Mônica escolher a blusa de cor preta, há 3 possibilidades de escolha para a calça.
Se Mônica escolher a blusa de cor verde, há 4 possibilidades de escolha para a calça.
Então, nas condições dadas, há $3+4+4+3+4=18$ maneiras de Mônica escolher suas roupas.

c) Admitindo blusa e camisa como sinônimos, temos:
Se Mônica escolher a blusa de cor branca, há 2 possibilidades de escolha para a calça.
Se Mônica escolher a blusa de cor vermelha, há 3 possibilidades de escolha para a calça.
Se Mônica escolher a blusa de cor amarela, há 3 possibilidades de escolha para a calça.
Se Mônica escolher a blusa de cor verde, há 3 possibilidades de escolha para a calça.
Então, nas condições dadas, há $2+3+3+3=11$ maneiras de Mônica escolher suas roupas.

Resposta da questão 4:
Vamos admitir que a escolha é feita de modo aleatório.

a) Seja A o evento escolher aleatoriamente duas bolas distintas simultaneamente de modo que a soma seja igual a 3 e Ω o espaço amostral escolher aleatoriamente duas bolas distintas simultaneamente.

$$A=\{(1,2)\}$$
$$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),\dots,(99,100)\}$$
$$n(A)=1$$
$$n(\Omega)=C_{100,2}=\frac{100!}{2!\cdot 98!}=50\cdot 99$$

Assim,
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$$
$$P(A)=\frac{1}{50\cdot 99}$$
$$P(A)=\frac{1}{4950}$$

b) Seja B o evento escolher aleatoriamente duas bolas distintas simultaneamente de modo que a soma seja menor ou igual a 7 e Ω o espaço amostral escolher aleatoriamente duas bolas distintas simultaneamente.
Soma igual a 3: $(1,2)$
Soma igual a 4: $(1,3)$
Soma igual a 5: $(1,4),(2,3)$
Soma igual a 6: $(1,5),(2,4)$
Soma igual a 7: $(1,6),(2,5),(3,4)$
$$B=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(1,5),(2,4),(1,6),(2,5),(3,4)\}$$
$$n(B)=9$$
$$n(\Omega)=50\cdot 99$$

Assim,
$$P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}$$
$$P(B)=\frac{9}{50\cdot 99}$$
$$P(B)=\frac{1}{550}$$

c) Seja C o evento escolher aleatoriamente duas bolas distintas simultaneamente de modo que o produto seja ímpar e Ω o espaço amostral escolher aleatoriamente duas bolas distintas simultaneamente.

$n(C) = C_{50,\,2}$ (total de duplas de bolas ímpares)

$n(C) = \dfrac{50!}{2! \cdot 48!}$

$n(C) = 25 \cdot 49$

Assim,

$P(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)}$

$P(C) = \dfrac{25 \cdot 49}{50 \cdot 99}$

$P(C) = \dfrac{49}{198}$

A probabilidade de que o produto seja par é dada por $P(\overline{C}) = 1 - P(C)$.

Então,

$P(\overline{C}) = 1 - \dfrac{49}{198}$

$P(\overline{C}) = \dfrac{149}{198}$

Resposta da questão 5:

a) Os pontos de intersecção entre a parábola de equação $y = x^2 - x + 1$ e a reta de equação $y = x + 1$ são obtidos à partir do sistema abaixo:

$$\begin{cases} y = x^2 - x + 1 & (i) \\ y = x + 1 & (ii) \end{cases}$$

Das equações (i) e (ii),

$x^2 - x + 1 = x + 1$

$x^2 - x - x = 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

$x = 0$ ou $x = 2$

Substituindo $x = 0$ na equação (ii),

$y = 1$

Substituindo $x = 2$ na equação (ii),

$y = 3$

Assim, os pontos de intersecção entre a parábola de equação e a reta de equação $y = x + 1$ são $(0, 1)$ e $(2, 3)$.

b) Para que a parábola de equação $y = x^2 - x + 1$ intercepte a reta de equação $y = x + b$ num único ponto, basta que a equação $x^2 - x + 1 = x + b$ admita duas soluções idênticas.

Daí,

$x^2 - x - x + 1 - b = 0$

$x^2 - 2x + 1 - b = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - b)$

$\Delta = 4 - 4 + 4b$

$\Delta = 4b$

A equação $x^2 - x + 1 = x + b$ admite duas soluções idênticas quando $\Delta = 0$, ou seja, $b = 0$.

c) As retas que passam pelo ponto $(1, 0)$ são da dadas por:

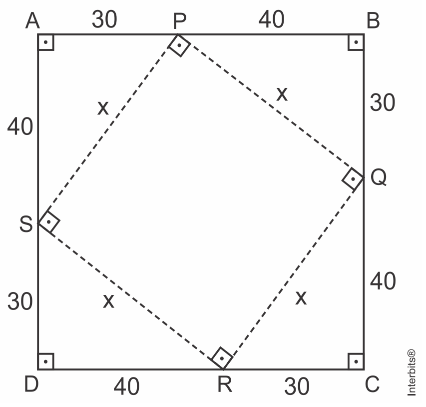
$$y - 0 = m(x - 1)$$
$$y = mx - m$$

Assim, queremos que a equação $x^2 - x + 1 = mx - m$ tenha duas soluções idênticas.
Logo,

$$x^2 - x - mx + 1 + m = 0$$
$$x^2 - x(1 + m) + 1 + m = 0$$
$$\Delta = [-(1 + m)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 + m)$$
$$\Delta = (1 + m) \cdot (-3 + m)$$
$$\Delta = 0,$$
$$1 + m = 0 \therefore m = -1 \text{ ou } -3 + m = 0 \therefore m = 3$$

Dessa forma, as retas que passam pelo ponto $(1, 0)$ e que interceptam a parábola de equação $y = x^2 - x + 1$ em um único ponto são as retas de equação $y = x^2 - x + 1$ e $y = 3x - 3$.

Resposta da questão 6:
Do enunciado e da figura, temos:



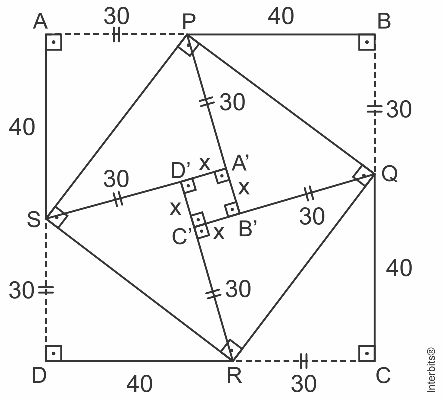
a) Seja A_{APS} a área do triângulo APS,

$$A_{APS} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40$$
$$A_{APS} = 600 \text{ cm}^2$$

b) Sendo $PS = x$, a área do quadrado $PRQS$ é $A_{PQRS} = x^2$.
No triângulo APS,

$$x^2 = 30^2 + 40^2$$
$$x^2 = 2500 \text{ cm}^2$$

c) Temos:



$CR = RC'$

$C\hat{R}Q = C'\hat{R}Q$

$\overline{RQ}$ é lado comum dos triângulos CRQ e $C'RQ$.

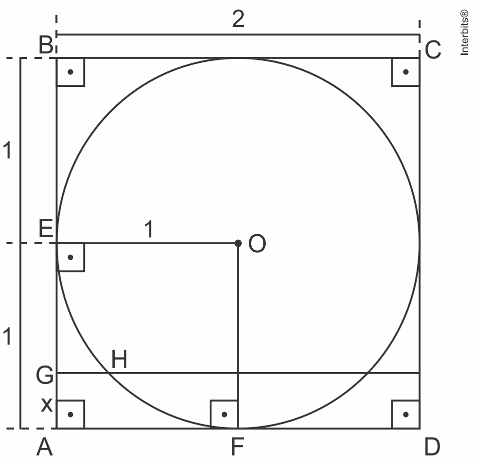
Dessa forma, os triângulos CRQ e $C'RQ$ são congruentes.
Então,

$QC' = 40$

$30 + x = 40$

$x = 10 \text{ cm}$

Resposta da questão 7:
a) Teremos:

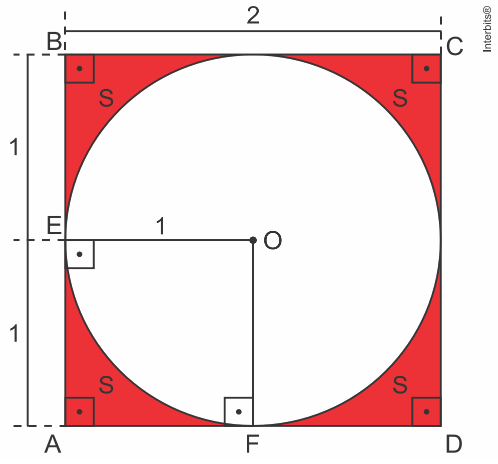


Do enunciado e da figura, temos:

$S_{quadrado} = 2^2 = 4$

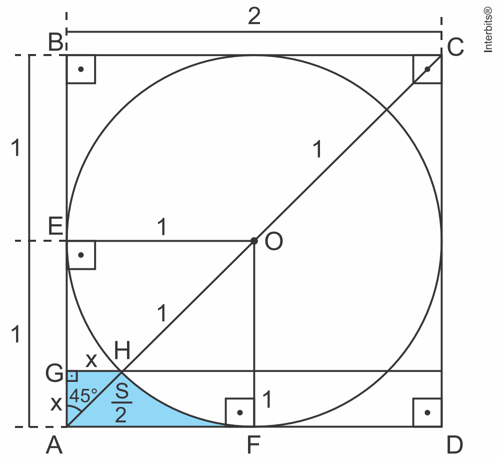
$S_{círculo} = \pi \cdot 1^2 = \pi$

b) Teremos:



$$4S + \pi = 4$$
$$4S = 4 - \pi$$
$$S = 1 - \frac{\pi}{4}$$

c) Teremos:



No triângulo AGH,

$$(AH)^2 = x^2 + x^2$$
$$(AH)^2 = 2x^2$$

Como $AH > 0$ e $x > 0$,

$$AH = x\sqrt{2}$$

No triângulo ABC,

$$(AC)^2 = 2^2 + 2^2$$
$$(AC)^2 = 2 \cdot 2^2$$

Como $AC > 0$,

$$AC = 2\sqrt{2}$$

Então,

$$AC = 2AH + 2$$
$$2\sqrt{2} = 2 \cdot x\sqrt{2} + 2$$
$$\sqrt{2} = x\sqrt{2} + 1$$
$$x\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$
$$\left(x\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2$$
$$2x^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$
$$x^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}$$
$$x^2 = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$$

Assim, a área pedida é dada por:

$$\frac{x \cdot x}{2} + \frac{S}{2}$$
$$\frac{x^2}{2} + \frac{S}{2}$$
$$\frac{\frac{3}{2} - \sqrt{2}}{2} + \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{2}$$
$$\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$$
$$\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{8}$$

Resposta da questão 8:

a) A média final de Alberto é $\bar{x}$, onde:

$$\bar{x} = \frac{6,0 + 6,5 + 8,5}{3}$$
$$\bar{x} = 7$$

b) Seja y a nota da terceira prova de Pedro.

$$\frac{4,0 + 5,0 + y}{3} \geq 6$$
$$9 + y \geq 18$$
$$y \geq 9$$
$$y_{\text{mínimo}} = 9$$

c) Seja z a nota mínima da segunda prova de João que garante que ele seja aprovado com média 6 após ter tirado 3 na primeira prova.

w é nota da terceira prova.

$$\frac{3,0 + z + w}{3} = 6$$
$$3 + z + w = 18$$
$$z = 15 - w$$

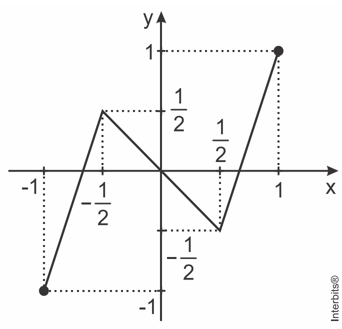
z é obtido tomando o maior valor possível para w, ou seja, fazendo $w = 10$.

Assim,

$$z = 15 - 10$$
$$z = 5$$

Resposta da questão 9:

a) Considere a figura.



b) Desde que $\frac{1}{3} \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, temos $f_2\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2} f_1\left(\frac{2}{3}\right)$. Portanto, como $\frac{2}{3} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, segue que a resposta é

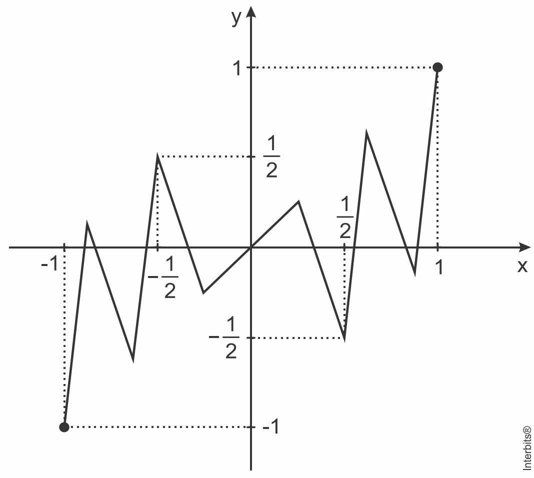
$$f_2\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(3 \cdot \frac{2}{3} - 2\right) = 0.$$

c) Temos

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(3(4x+3)+2) - \frac{1}{4}, \text{ se } -1 \le 4x+3 \le -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}(-(4x+3)) - \frac{1}{4}, \text{ se } -\frac{1}{2} < 4x+3 < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}(3(4x+3)-2) - \frac{1}{4}, \text{ se } \frac{1}{2} \le 4x+3 \le 1 \\ -\frac{1}{2}(3 \cdot 2x + 2), \text{ se } -1 \le 2x \le -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(-2x), \text{ se } -\frac{1}{2} < 2x < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(3 \cdot 2x - 2), \text{ se } \frac{1}{2} \le 2x \le 1 \\ \frac{3}{4}(3(4x-3)+2) + \frac{1}{4}, \text{ se } -1 \le 4x-3 \le -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}(-(4x-3)) + \frac{1}{4}, \text{ se } -\frac{1}{2} < 4x-3 < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}(3(4x-3)-2) + \frac{1}{4}, \text{ se } \frac{1}{2} \le 4x-3 \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 9x+8, \text{ se } -1 \le x \le -\frac{7}{8} \\ -3x - \frac{5}{2}, \text{ se } -\frac{7}{8} < x < -\frac{5}{8} \\ 9x+5, \text{ se } -\frac{5}{8} \le x \le -\frac{1}{2} \\ -3x-1, \text{ se } -\frac{1}{2} \le x \le -\frac{1}{4} \\ x, \text{ se } -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4} \\ -3x+1, \text{ se } \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \\ 9x-5, \text{ se } \frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{8} \\ -3x + \frac{5}{2}, \text{ se } \frac{5}{8} < x < \frac{7}{8} \\ 9x-8, \text{ se } \frac{7}{8} \le x \le 1 \end{cases}.$$

Onde o gráfico de f_2 é



Em consequência, as abscissas dos pontos de interseção do gráfico de f_2 com o gráfico da função identidade são tais que $x=-1,$ $x=-\frac{5}{8},$ $x=\frac{5}{8},$ $x=1$ e $x\in\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right].$

Resposta da questão 10:

a) Calculando:

$$P(x)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}=0{,}0769=7{,}69\%$$

b) Calculando:

$$P(x)=\frac{C_{48}^{5}}{C_{52}^{5}}=\frac{48!\cdot 47!}{52!\cdot 43!}=\frac{48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44\cdot 43!\cdot 47!}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48\cdot 47!\cdot 43!}=\frac{47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}$$

Resposta da questão 11:

a) A área do retângulo é igual a $1\cdot 0{,}5=0{,}5\ \text{m}^2,$ enquanto que a área da região 2 mede $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0{,}5=0{,}25\ \text{m}^2.$

Portanto, a resposta é $\frac{0{,}25}{0{,}5}\cdot\frac{0{,}25}{0{,}5}=\frac{1}{4}.$

b) Conforme (a), Pelé ganha 10 pontos com probabilidade $\frac{1}{2}.$ Daí, como ele sempre acerta o painel, segue que ele ganha 20 pontos com probabilidade $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$

Lançando dois dardos, ele ganha 40 pontos com probabilidade $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$

Por outro lado, para ganhar 40 pontos lançando três dardos, ele deverá ganhar 20 ou 30 pontos lançando dois dardos. Ganhando 20 pontos com probabilidade de $\frac{1}{4}$ no lançamento de dois dardos, tem-se que ele faz 40 pontos lançando o terceiro dardo com probabilidade $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$ Finalmente, ganhando 30 pontos com probabilidade de $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ no lançamento de dois dardos, ele faz 40 pontos lançando o terceiro dardo com probabilidade $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$

A resposta é $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}.$

c) O resultado é dado por $3!\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}.$

Resposta da questão 12:

a) **1ª Solução:** O número de triângulos de lado 1 no triângulo de lado N é dado por
$1+3+5+\ldots+(2N-1)=\left(\frac{1+2N-1}{2}\right)N=N^2.$

2ª Solução: O número de triângulos de lado $1,$ para cada N natural não nulo, constitui a sequência $(1,4,9,16,\ldots),$ que é uma progressão aritmética de segunda ordem. Assim, desde que $a_1=1,$ temos $a_{N+1}-a_N=3+(N-1)\cdot 2=2N+1,$ com $N\in\mathbb{N}^*.$

Tomando o somatório de 1 até $N-1,$ encontramos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N-1}(a_{k+1}-a_k)=\left(\frac{3+2N-1}{2}\right)(N-1) &\Leftrightarrow a_N-a_1=N^2-1\\ &\Leftrightarrow a_N=N^2-1+1\\ &\Leftrightarrow a_N=N^2.\end{aligned}$$

Portanto, a resposta é N^2 triângulos de lado $1.$

b) Tem-se que o número de triângulos brancos é dado por $1+5+9+13+17=45,$ enquanto que o número de triângulos cinza é igual a $3+7+11+15=36.$

c) Se $N=10,$ então o número de triângulos brancos é 45 e o número de triângulos cinza é $36+19=55.$ Portanto, a probabilidade pedida é igual a

$$\begin{aligned}\frac{\binom{45}{2}+\binom{55}{2}}{\binom{100}{2}} &= \frac{\frac{45!}{2!\cdot 43!}+\frac{55!}{2!\cdot 53!}}{\frac{100!}{2!\cdot 98!}}\\ &=\frac{990+1485}{4950}\\ &=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Resposta da questão 13:

a) Calculando:
$$d=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{25}\rightarrow d=5$$

b) Calculando:
$$C(x,2-x)$$
$$A=\frac{|D|}{2}=4$$
$$A=\begin{vmatrix}3 & 4\\ x & 2-x\end{vmatrix}=8\rightarrow\begin{cases}6-3x-4x=8\rightarrow x=2\\ 6-3x-4x=-8\rightarrow x=-2/7\end{cases}$$
$$C(2,0)\ \text{ ou }\ C\left(-2/7,16/7\right)$$

Resposta da questão 14:

a) Tem-se que $h(-1)=h(1)=0$ e $h(0)=1.$ Portanto, a resposta é
$$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|-1-1|=1\,\text{u.a.}$$

b) Desde que $h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},$ segue que o resultado é igual a

$$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{8} \text{ u.a.}$$

c) Sendo $h\left(-\frac{3}{4}\right) = h\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{16}$, $h\left(-\frac{1}{4}\right) = h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{16}$ e $h\left(-\frac{1}{2}\right) = h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, pela simetria do polígono em relação ao eixo das ordenadas, temos

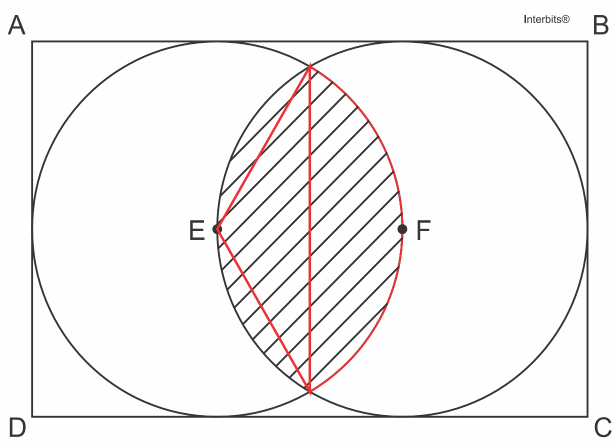
$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{15}{16} & \frac{3}{4} & \frac{7}{16} & 0 & 0 \end{matrix}\right\| = \left|\frac{3}{16} + \frac{7}{32} - \frac{1}{4} - \frac{15}{32} - \frac{9}{16} - \frac{7}{16}\right| = \frac{21}{16} \text{ u.a.}$$

Resposta da questão 15:

a) Calculando:

$AB = 3r = 60 \rightarrow r = 20$

b) A área hachurada é igual ao dobro da área do setor circular menos a área do triângulo. Observe a figura a seguir.



Calculando:

$$S = 2 \cdot \left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{800\pi - 600\sqrt{3}}{3}$$